الأستاذ: نجيب عثماني

تمارين محلولة:التكامل

المستوى : الثانية باك علوم فيزيائية وعلوم الحياة والأرض والعلوم الزراعية

أكاديمية الجهة الشرقية

تمرين1: أحسب التكاملات التالية : (1 $I=\int_2^4 3x\,dx$

(2 $J=\int_0^1(2x+3)\,dx$ (3 $K=\int_e^{e^2}\frac{1}{t}\,dt$ (4 $L=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos(2\theta)\,d\theta$

أجوبة (1:

الدالة : $x\mapsto 3x$ متصلة على $[2;4]$

الدالة : $x\mapsto \frac{3}{2}x^2$ أصلية لها على $[2;4]$

إذن :

$$I=\int_2^4 3x\,dx=\left[\frac{3}{2}x^2\right]_2^4=\frac{3}{2}\times4^2-\frac{3}{2}\times2^2=18$$

(2 $J=\int_0^1(2x+3)\,dx=\left[x^2+3x\right]_0^1=(1+3)-(0)=4$

(3 $K=\int_e^{e^2}\frac{1}{t}\,dt=\left[\ln t\right]_e^{e^2}=\ln e^2-\ln e=2-1=1$

(4 $L=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos(2\theta)\,d\theta=\left[\frac{1}{2}\sin(2\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{2}\sin0=\frac{1}{2}$

تمرين2: أحسب التكاملات الآتية : $I_1=\int_0^2(2x-1)\,dx$

$I_2=\int_{-1}^1\left(x^4-4x^3+2\right)dx$ $\quad I_3=\int_1^2\frac{1}{x^2}\,dx$

$I_4=\int_0^{\ln2}e^{2t}\,dt$ $\quad I_5=\int_0^{\sqrt{\ln2}}te^{-t^2}\,dt$ $\quad I_6=\int_1^e\frac{\ln^2x}{x}\,dx$

$I_7=\int_0^{\ln2}\frac{e^x}{e^x+1}\,dx$ $\quad I_8=\int_{\ln2}^{\ln3}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}\,dx$

$I_9=\int_1^e\frac{\ln x}{x}\,dx$

$I_{10}=\int_2^3\frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x-4}}\,dx$ $\quad I_{11}=\int_0^1\sqrt{2x+1}\,dx$

$I_{12}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sin^3x\,dx$

$I_{13}=\int_1^2\frac{3}{(3x-4)^5}\,dx$ $\quad I_{14}=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(2-\cos3x)\,dx$

$I_{15}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2x\,dx$ $\quad I_{16}=\int_0^1\left(\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{2x+1}\right)dx$

$I_{17}=\int_1^e\frac{\ln^3x}{x}\,dx$ $\quad I_{18}=\int_0^1(x-1)e^{(x-1)^2}\,dx$

$I_{19}=\int_1^2\frac{1}{x(1+\ln x)}\,dx$ $\quad I_{20}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan x)^2\,dx$

$I_{21}=\int_1^e\frac{8x^9-4x+2}{x}\,dx$

اجوبة : $I_1=\int_0^2(2x-1)\,dx=\left[2\frac{x^2}{2}-x\right]_0^2=\left[x^2-x\right]_0^2$

$$I_1=\left(2^2-2\right)-\left(0^2-0\right)=4-2=2$$

$$I_2=\int_{-1}^1\left(x^4-4x^3+2\right)dx=\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{4}{4}x^4+2x\right]_{-1}^1=\left[\frac{1}{5}x^5-1x^4+2x\right]_{-1}^1$$

$$I_2=\left[\frac{1}{5}x^5-1x^4+2x\right]_{-1}^1=\left(\frac{1}{5}1^5-1^4+2\right)-\left(\frac{1}{5}(-1)^5-(-1)^4-2\right)$$

$$I_2=\left(\frac{1}{5}-1+2\right)-\left(-\frac{1}{5}-1-2\right)=\frac{1}{5}-1+2+\frac{1}{5}+1+2=\frac{2}{5}+4=\frac{22}{5}$$

$$I_3=\int_1^2\frac{1}{x^2}\,dx=\left[-\frac{1}{x}\right]_1^2=\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{1}{1}\right)=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$$

$$I_4=\int_0^{\ln2}e^{2t}\,dt=\int_0^{\ln2}\frac{1}{2}(2t)'e^{2t}\,dt=\left[\frac{1}{2}e^{2t}\right]_0^{\ln2}=\frac{1}{2}e^{2\ln2}-\frac{1}{2}e^{2\times0}$$

$$I_4=\frac{1}{2}e^{\ln2^2}-\frac{1}{2}e^0=\frac{1}{2}4-\frac{1}{2}e^0=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

$$I_5=\int_0^{\sqrt{\ln2}}te^{-t^2}\,dt=\int_0^{\sqrt{\ln2}}-\frac{1}{2}\left(-t^2\right)'e^{-t^2}\,dt=\left[-\frac{1}{2}e^{-t^2}\right]_0^{\sqrt{\ln2}}$$

$$I_5=\left[-\frac{1}{2}e^{-t^2}\right]_0^{\sqrt{\ln2}}=-\frac{1}{2}e^{-\left(\sqrt{\ln2}\right)^2}+\frac{1}{2}e^{-0^2}=-\frac{1}{2}e^{-\left(\sqrt{\ln2}\right)^2}+\frac{1}{2}$$

$$I_5=-\frac{1}{2}e^{-\ln2}+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}\frac{1}{e^{\ln2}}+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

$$I_6=\int_1^e\frac{\ln^2x}{x}\,dx=\int_1^e\frac{1}{x}\times\ln^2x\,dx=\int_1^e\ln'x\times\ln^2x\,dx$$

$$I_6=\left[\frac{1}{2+1}\ln^{2+1}x\right]_1^e=\frac{1}{3}\ln^3e-\frac{1}{3}\ln^31=\frac{1}{3}$$

$$I_7=\int_0^{\ln2}\frac{e^x}{e^x+1}\,dx=\int_0^{\ln2}\frac{\left(e^x+1\right)'}{e^x+1}\,dx=\left[\ln\left|e^x+1\right|\right]_0^{\ln2}$$

$$I_7=\ln\left|e^{\ln2}+1\right|-\ln\left|e^0+1\right|=\ln|3|-\ln|2|=\ln3-\ln2=\ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$I_8=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}dx=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{\left(e^x-e^{-x}\right)'}{e^x-e^{-x}}dx=\left[\ln\left|e^x-e^{-x}\right|\right]_{\ln 2}^{\ln 3}$$

$$I_8=\ln\left|e^{\ln 3}-e^{-\ln 3}\right|-\ln\left|e^{\ln 2}-e^{-\ln 2}\right|=\ln\left|3-\frac{1}{e^{\ln 3}}\right|-\ln\left|e^{\ln 2}-\frac{1}{e^{\ln 2}}\right|$$

$$I_8=\ln\left|3-\frac{1}{3}\right|-\ln\left|2-\frac{1}{2}\right|=\ln\left(\frac{8}{3}\right)-\ln\left(\frac{3}{2}\right)=\ln\left(\frac{\frac{8}{3}}{\frac{3}{2}}\right)=\ln\left(\frac{16}{9}\right)$$

$$I_9=\int_1^e\frac{1}{x}\ln x\,dx=\int_1^e(\ln x)'(\ln x)^1\,dx=\left[\frac{1}{1+1}(\ln x)^{1+1}\right]_1^e$$

$$I_9=\int_1^e\frac{1}{x}\ln x\,dx=\frac{1}{2}(\ln e)^2-\frac{1}{2}(\ln 1)^2$$

$$I_9=\int_1^e\frac{1}{x}\ln x\,dx=\frac{1}{2}-0=\frac{1}{2}$$

$$I_{10}=\int_2^3\frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x-4}}dx=2\int_2^3\frac{\left(x^2+3x-4\right)'}{2\sqrt{x^2+3x-4}}dx=2\left[\sqrt{x^2+3x-4}\right]_2^3$$

$$I_{10}=2\left[\sqrt{x^2+3x-4}\right]_2^3=2\left(\sqrt{14}-\sqrt{6}\right)$$

$$I_{11}=\int_0^1\sqrt{2x+1}dx=\frac{1}{2}\int_0^1(2x+1)'(2x+1)^{\frac{1}{2}}dx=2\left[\frac{1}{\frac{1}{2}+1}(2x+1)^{\frac{1}{2}+1}\right]_0^1$$

$$I_{11}=2\left[\frac{2}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{4}{3}(3)^{\frac{3}{2}}-\frac{4}{3}(1)^{\frac{3}{2}}=\frac{4}{3}\left(\left(\sqrt{(3)}\right)^3-1\right)=\frac{4}{3}\left(3\sqrt{(3)}-1\right)$$

$$I_{12}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sin^3 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)'\sin^3 x\,dx=\left[\frac{1}{4}\sin x^{3+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$I_{12}=\frac{1}{4}\sin^4\frac{\pi}{2}-\frac{1}{4}\sin^4 0=\frac{1}{4}-0=\frac{1}{4}$$

$$I_{13}=\int_1^2\frac{3}{(3x-4)^5}dx=3\int_1^2(3x-4)^{-5}dx=\int_1^2(3x-4)'(3x-4)^{-5}dx$$

$$I_{13}=\left[\frac{1}{-5+1}(3x-4)^{-5+1}\right]_1^2=\left[\frac{1}{-4}(3x-4)^{-4}\right]_1^2=\frac{1}{-4}(2)^{-4}-\frac{1}{-4}(-1)^{-4}$$

$$I_{13}=\frac{1}{-4}\times\frac{1}{16}+\frac{1}{4}=-\frac{1}{64}+\frac{16}{64}=\frac{15}{64}$$

$$I_{14}=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(2-\cos 3x)\,dx=\left[2x-\frac{1}{3}\sin 3x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=\left(2\frac{\pi}{3}-\frac{1}{3}\sin\pi\right)-0$$

$$I_{14}=\frac{2\pi}{3}$$

$I_{15}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x\,dx$ نعلم أن : $\cos^2 a=\frac{1+\cos 2a}{2}$ (الاخطاط)

$$I_{15}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2x)\,dx$$

$$I_{15}=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2x)\,dx=\frac{1}{2}\left[x+\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$I_{15}=\frac{\pi+2}{8}$$

$$I_{16}=\int_0^1\left(\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{2x+1}\right)dx=\int_0^1\left(\frac{(x+1)'}{(x+1)^2}+\frac{1}{2}\frac{(2x+1)'}{2x+1}\right)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\ln|2x+1|\right]_0^1=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln|3|+1-\frac{1}{2}\ln|1|=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln 3$$

$$I_{17}=\int_1^e\frac{\ln^3 x}{x}dx=\int_1^e\frac{1}{x}\times\ln^3 x\,dx=\int_1^e\ln' x\times\ln^3 x\,dx$$

$$I_6=\left[\frac{1}{3+1}\ln^{3+1}x\right]_1^e=\frac{1}{4}\ln^4 e-\frac{1}{4}\ln^4 1=\frac{1}{4}$$

$$I_{18}=\int_0^1(x-1)e^{(x-1)^2}dx$$

$$I_{18}=\int_0^1(x-1)e^{(x-1)^2}dx=\int_0^1\frac{1}{2}\left((x-1)^2\right)'e^{(x-1)^2}dt=\left[\frac{1}{2}e^{(x-1)^2}\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{2}e^0-\frac{1}{2}e^1=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e=\frac{1}{2}(1-e)$$

$$I_{19}=\int_1^2\frac{1}{x(1+\ln x)}dx=\int_1^2\frac{\frac{1}{x}}{(1+\ln x)}dx$$

$$I_{19}=\int_1^2\frac{1}{x(1+\ln x)}dx=\int_1^2\frac{(1+\ln x)'}{(1+\ln x)}dx=\left[\ln|1+\ln x|\right]_1^2$$

$$I_{19}=\ln|1+\ln 2|-\ln|1+\ln 1|=\ln|1+\ln 2|=\ln(1+\ln 2)$$

$$I_{20}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan x)^2\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}1+(\tan x)^2-1dx$$

$$I_{20}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\left(1+(\tan x)^2\right)-1\right)dx=[\tan x-x]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$I_{20}=\tan\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=1-\frac{\pi}{4}$$

$$I_{21}=\int_1^e\frac{8x^9-4x+2}{x}dx=\int_1^e\left(8x^8-4+\frac{2}{x}\right)dx$$

$$=\left[\frac{8}{9}x^9-4x+2\ln x\right]_1^e=\frac{8}{9}e^9-4e+\frac{46}{9}$$

خاصيات مهمة : $\cos(2a)=\cos^2 a-\sin^2 a$ و $\cos(2a)=1-2\sin^2 a$

و $\cos^2 a=\frac{1+\cos 2a}{2}$ و $\sin^2 a=\frac{1-\cos 2a}{2}$ و $\sin(2a)=2\sin a\times\cos a$

تمرين3: أحسب التكامل $I=\int_0^3|x-1|dx$

الجواب :

لدينا: $x\in[0,3]$

$x-1=0$ يعني $x=1$ ندرس اشارة $x-1$

x	$-\infty$ 1 $+\infty$
$x-1$	$-$ 0 $+$

علاقة شال $I=\int_0^3|x-1|dx=\int_0^1|x-1|dx+\int_1^3|x-1|dx$

$$I=\int_0^1(1-x)dx+\int_1^3(x-1)dx$$

$$I=\left[x-\frac{x^2}{2}\right]_0^1+\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_1^3=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{9}{2}-3\right)-\left(\frac{1}{2}-1\right)=\frac{5}{2}$$

تمرين4: نضع: $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x dx$ $\quad J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 x dx$

1. أحسب $I+J$ و $I-J$
2. استنتج قيمة كل من I و J

الجواب :

1) $$I+J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 xdx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 xdx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)dx$$

$$I+J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}1dx=[x]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}-0=\frac{\pi}{4}$$

$$I-J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 xdx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 xdx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)dx$$

$$I-J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2xdx=\frac{1}{2}[\sin 2x]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{2}-0\right)=\frac{1}{2}$$

2) $\begin{cases} I+J=\frac{\pi}{4} \\ I-J=\frac{1}{2}\end{cases}$ بجمع المتساويتين طرف لطرف نجد :

$$2I=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$$

يعني : $I=\frac{\pi+2}{8}$ وبالتعويض في المعادلة الأولى نجد :

$$\frac{\pi+2}{8}+J=\frac{\pi}{4}$$

يعني : $J=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi+2}{8}=\frac{2\pi-\pi-2}{8}=\frac{\pi-2}{8}$

تمرين5: نضع: $I=\int_0^{\ln 16}\frac{e^x+3}{e^x+4}dx$ و $J=\int_0^{\ln 16}\frac{1}{e^x+4}dx$

1. أحسب $I+J$ و $I-3J$
2. استنتج قيمة كل من I و J

الجواب: (1

$$I+J=\int_0^{\ln 16}\frac{e^x+3}{e^x+4}dx+\int_0^{\ln 16}\frac{1}{e^x+4}dx=\int_0^{\ln 16}\left(\frac{e^x+3}{e^x+4}+\frac{1}{e^x+4}\right)dx$$

$$I+J=\int_0^{\ln 16}\left(\frac{e^x+4}{e^x+4}\right)dx=[x]_0^{\ln 16}=\ln 16-0=4\ln 2$$

$$I-3J=\int_0^{\ln 16}\frac{e^x+3}{e^x+4}dx-3\int_0^{\ln 16}\frac{1}{e^x+4}dx=\int_0^{\ln 16}\left(\frac{e^x+3}{e^x+4}-\frac{3}{e^x+4}\right)dx$$

$$I-3J=\int_0^{\ln 16}\frac{e^x}{e^x+4}dx=\int_0^{\ln 16}\frac{\left(e^x+4\right)'}{e^x+4}dx=\left[\ln\left|e^x+4\right|\right]_0^{\ln 16}$$

$$I-3J=\ln\left|e^{\ln 16}+4\right|-\ln\left|e^0+4\right|=\ln|20|-\ln|5|=\ln 20-\ln 5$$

$$I-3J=\ln\frac{20}{5}=\ln 4=2\ln 2$$

(2 $\begin{cases} I+J=4\ln 2 \\ I-3J=2\ln 2\end{cases}$ بطرح المتساويتين طرف لطرف نجد :

$$4J=2\ln 2$$

يعني : $J=\frac{\ln 2}{2}$ وبالتعويض في المعادلة الأولى نجد :

يعني : $\frac{\ln 2}{2}+I=4\ln 2$: $I=4\ln 2-\frac{\ln 2}{2}=\frac{7\ln 2}{2}$

تمرين6: احسب التكامل $I=\int_1^3\frac{|x-2|}{\left(x^2-4x\right)^2}dx$

الجواب: $x-2=0$ يعني $x=2$ ندرس اشارة $x-2$

x	$-\infty$ $\quad$ 2 $\quad$ $+\infty$
$x-2$	$-$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$

$$I=\int_1^3\frac{|x-2|}{\left(x^2-4x\right)^2}dx=\int_0^2\frac{|x-2|}{\left(x^2-4x\right)^2}dx+\int_2^3\frac{|x-2|}{\left(x^2-4x\right)^2}dx$$

علاقة شال:

$$=\int_0^2\frac{-(x-2)}{\left(x^2-4x\right)^2}dx+\int_2^3\frac{x-2}{\left(x^2-4x\right)^2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2\frac{-\left(x^2-4x\right)'}{\left(x^2-4x\right)^2}dx+\frac{1}{2}\int_2^3\frac{\left(x^2-4x\right)'}{\left(x^2-4x\right)^2}dx$$

$$I=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x^2-4x}\right]_1^2-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x^2-4x}\right]_2^3$$

$$I=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{-4}+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)=\frac{2}{6}-\frac{2}{8}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$$

تمرين7: احسب التكامل $I=\int_0^2\left|x^2-x-2\right|dx$

الجواب:

$$I=\int_{-2}^2\left|x^2-x-2\right|dx$$

دراسة اشارة x^2-x-2 على المجال : $[0;2]$

$a=1>0 \qquad \Delta=b^2-4ac=9>0$

بما أن $\Delta\succ 0$ فان للحدودية جذرين هما:

$x_2=-1$ و $x_1=2$

خارج الجذرين اشارة $a=1>0$

ومنه:

x	$-\infty$		-1		2	$+\infty$
x^2-x-2		$+$	0	$-$	0	$+$

بتطبيق علاقة شال نجد :

$$I=\int_{-2}^2\left|x^2-x-2\right|dx=\int_{-2}^{-1}\left|x^2-x-2\right|dx+\int_{-1}^2\left|x^2-x-2\right|dx$$

$$I=\int_{-2}^{-1}\left(x^2-x-2\right)dx+\int_{-1}^2-\left(x^2-x-2\right)dx$$

$$A=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x\right]_{-2}^{-1}-\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x\right]_{-1}^2$$

$$A=\left(\frac{1}{3}\times(-1)^3-\frac{1}{2}\times(-1)^2-2\times(-1)\right)-\left(\frac{1}{3}\times(-2)^3-\frac{1}{2}\times(-2)^2-2\times(-2)\right)-$$
$$\left(\frac{1}{3}\times(2)^3-\frac{1}{2}\times(2)^2-2\times(2)\right)+\left(\frac{1}{3}\times(-1)^3-\frac{1}{2}\times(-1)^2-2\times(-1)\right)$$
$$=\left(-\frac{1^3}{3}-\frac{1}{2}+2\right)-\left(-\frac{8}{3}-2+4\right)-\left(\frac{8}{3}-\frac{4}{2}-4\right)+\left(-\frac{1^3}{3}-\frac{1}{2}+2\right)$$
$$=-\frac{2}{3}+7=\frac{19}{3}$$

تمرين8: نضع $A=\int_1^e\left(\frac{1}{t}+\ln t\right)dt$

$B=\int_1^e\left(1+\ln\left(\frac{1}{t}\right)\right)dt$ أحسب $A+B$

الجواب:

$$A+B=\int_1^e\left(\frac{1}{t}+\ln t+1+\ln\left(\frac{1}{t}\right)\right)dt=\int_1^e\left(\frac{1}{t}+\ln t+1-\ln(t)\right)dt$$

$$A+B=\int_1^e\left(\frac{1}{t}+1\right)dt=\left[\ln|t|+t\right]_1^e=\ln e+e-\ln|1|-1=e$$

تمرين9: نضع: $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\times\cos 2x dx$

$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\times\cos 2x dx$

1. أحسب $I+J$ و $I-J$
2. استنتج قيمة كل من I و J

الجواب :

1) $I+J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\times\cos 2x dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\times\cos 2x dx$

$$I+J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x\times 1dx=\frac{1}{2}\left[\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$I+J=\frac{1}{2}\left[\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\left[\sin\pi-\sin 0\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=0$$

$$I-J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\times\cos 2x dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\times\cos 2x dx$$

$$I-J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x\times\cos 2x dx$$

$$I-J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 2x dx$$

باستعمال القاعدة : $\cos^2 a=\frac{1+\cos 2a}{2}$ $a=2x$ نجد :

$$I-J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 4x}{2}dx=\frac{1}{2}\left[x+\frac{1}{4}\sin 4x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{4}\sin 2\pi\right)=\frac{\pi}{4}$$

2) $\begin{cases}I+J=0\\ I-J=\frac{\pi}{4}\end{cases}$ بجمع المتساويتين طرف لطرف نجد : $2I=\frac{\pi}{4}$

يعني : $I=\frac{\pi}{8}$ وبالتعويض في المعادلة الأولى نجد :

$$\frac{\pi}{8}+J=0$$

يعني : $J=-\frac{\pi}{8}$

تمرين10: 1)تحقق أنه لكل t من $\mathbb{R}-\{-1\}$:

$$\frac{t^2}{1+t}=t-1+\frac{1}{1+t}$$

2)أحسب التكامل I حيث: $I=\int_0^1\frac{t^2}{1+t}dt$

الجواب: 1)

$$\frac{t^2}{1+t}=\frac{\left(t^2-1\right)+1}{1+t}=\frac{t^2-1}{1+t}+\frac{1}{1+t}=\frac{(t-1)(t+1)}{1+t}+\frac{1}{1+t}$$

$\frac{t^2}{1+t}=t-1+\frac{1}{1+t}$ لكل t من $\mathbb{R}-\{-1\}$

2)

$$I=\int_0^1\frac{t^2}{1+t}dt=\int_0^1\left(t-1+\frac{(1+t)'}{1+t}\right)dt=\left[\frac{t^2}{2}-t+\ln|1+t|\right]_0^1$$

$$I=\frac{1}{2}-1+\ln|2|=-\frac{1}{2}+\ln 2$$

تمرين11: 1)تحقق أنه لكل x من $\mathbb{R}-\{-1;1\}$:

$$\frac{4x-5}{x^2-1}=\frac{9}{2(x+1)}-\frac{1}{2(x-1)}$$

2)أحسب التكامل I حيث: $I=\int_3^5\frac{4x-5}{x^2-1}dx$

الجواب :

1) $$\frac{9}{2(x+1)}-\frac{1}{2(x-1)}=\frac{18(x-1)-2(x+1)}{4(x+1)(x-1)}=\frac{18x-18-2x-2}{4(x+1)(x-1)}$$

$$=\frac{16x-20}{4(x+1)(x-1)}=\frac{4x-5}{(x+1)(x-1)}=\frac{4x-5}{x^2-1}$$

2) $$I=\int_3^5\frac{4x-5}{x^2-1}dx=\int_3^5\left(\frac{9}{2(x+1)}-\frac{1}{2(x-1)}\right)dx$$

$$=\frac{9}{2}\int_3^5\frac{1}{(x+1)}dx-\frac{1}{2}\int_3^5\frac{1}{x-1}dx=\frac{9}{2}\int_3^5\frac{(x+1)'}{(x+1)}dx-\frac{1}{2}\int_3^5\frac{(x-1)'}{x-1}dx$$

$$=\frac{9}{2}\left[\ln|x+1|\right]_3^5-\frac{1}{2}\left[\ln|x-1|\right]_3^5=\frac{9}{2}(\ln 6-\ln 4)-\frac{1}{2}(\ln 4-\ln 2)$$

$$I=\frac{9}{2}\ln 6-\frac{9}{2}\ln 4-\frac{1}{2}\ln 4+\frac{1}{2}\ln 2=\frac{9}{2}\ln 6-\frac{19}{2}\ln 2$$

تمرين12:

1. حدد الأعداد الحقيقية : a و b علما أن :

$$\frac{x^3}{x^2+1}=ax+\frac{bx}{x^2+1}$$

2. استنتج قيمة التكامل: $I=\int_0^1\frac{x^3}{x^2+1}dx$

الجواب :

(1 $ax+\frac{bx}{x^2+1}=\frac{ax(x^2+1)+bx}{x^2+1}=\frac{ax^3+ax+bx}{x^2+1}=\frac{ax^3+x(a+b)}{x^2+1}$

بالمقارنة مع الكتابة : $\frac{x^3}{x^2+1}$ أي الكتابة : $\frac{1x^3+0x^2+0x+0}{x^2+1}$

نحصل على النظمة التالية :

$\begin{cases}a=1\\a+b=0\end{cases}$ يعني : $\begin{cases}a=1\\b=-1\end{cases}$

ومنه : $\frac{x^3}{x^2+1}=x-\frac{x}{x^2+1}$

(2

وجدنا : $\frac{x^3}{x^2+1}=x-\frac{x}{x^2+1}$

اذن : $\int_0^1\frac{x^3}{x^2+1}dx=\int_0^1\left(x-\frac{x}{x^2+1}\right)dx$

يعني : $\int_0^1\frac{x^3}{x^2+1}dx=\int_0^1xdx-\int_0^1\frac{x}{x^2+1}dx$

يعني : $\int_0^1\frac{x^3}{x^2+1}dx=\int_0^1xdx-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{(x^2+1)'}{x^2+1}dx$

يعني : $=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1-\frac{1}{2}\left[\ln|x^2+1|\right]_0^1$

$$\int_0^1\frac{x^3}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 2$$

تمرين13: نضع: $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 xdx$

1. بين : $\cos^4 x=\frac{1}{8}(\cos 4x+4\cos 2x+3)$ (عملية الاخطاط)

2. استنتج حساب التكامل: I

الجواب :

(1لنبين أن: $\cos^4 x=\frac{1}{8}(\cos 4x+4\cos 2x+3)$ لكل x من $\mathbb{R}$

لدينا: $\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ و منه: $\cos^4 x=\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4$

$$=\frac{1}{16}\left(\left(e^{ix}\right)^4+4\left(e^{ix}\right)^3\cdot\left(e^{-ix}\right)+6\left(e^{ix}\right)^2\cdot\left(e^{-ix}\right)^2+4\left(e^{ix}\right)^1\cdot\left(e^{-ix}\right)^3+\left(e^{-ix}\right)^4\right)$$

$$=\frac{1}{16}\left(e^{4ix}+4e^{i3x}e^{-ix}+6e^{2ix}e^{-2ix}+4e^{ix}e^{-3ix}+e^{-4ix}\right)$$

$$=\frac{1}{16}\left(e^{4ix}+e^{-4ix}+4e^{2ix}+4e^{2ix}+6\right)$$

$$=\frac{1}{16}\left(\left(e^{4ix}+e^{-4ix}\right)+4\left(e^{2ix}+e^{2ix}\right)+6\right)$$

نعلم أن : $2\cos x=e^{ix}+e^{-ix}$ و $2\cos nx=e^{inx}+e^{-inx}$

اذن : $\cos^4\theta=\frac{1}{16}\left((2\cos 4x)+4(2\cos 2x)+6\right)$

$$\cos^4 x=\frac{1}{8}(\cos 4x+4\cos 2x+3)$$

(2 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 xdx=\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos 4x+4\cos 2x+3)dx$

$$=\frac{1}{8}\left[\frac{1}{4}\sin 4x+4\frac{1}{2}\sin 2x+3x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\sin 2\pi+4\frac{1}{2}\sin\pi+3\frac{\pi}{2}\right)=\frac{3\pi}{16}$$

تمرين14: بين أن : $\frac{1}{6}\le I=\int_0^1\frac{x^2}{1+x}dx\le\frac{1}{3}$

الجواب : لدينا: $0\le x\le 1\Leftrightarrow x\in[0,1]$

اذن : $1\le x+1\le 2$: $\frac{1}{2}\le\frac{1}{x+1}\le 1$

اذن: $\frac{x^2}{2}\le\frac{x^2}{1+x}\le x^2$

وبالتالي : $\int_0^1\frac{x^2}{2}dx\le\int_0^1\frac{x^2}{1+x}dx\le\int_0^1x^2dx$

اذن : $\left[\frac{x^3}{6}\right]_0^1\le I\le\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1$ ومنه : $\frac{1}{6}\le I\le\frac{1}{3}$

تمرين15: بين أن : $\frac{1}{e}\le\int_0^1e^{-x^2}dt\le 1$

الجواب :

ليكن t عنصرا من $[0;1]$ لدينا $0\le t^2\le 1$ و منه :

$$-1\le -t^2\le 0$$

بما أن الدالة $x\mapsto e^x$ تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$ فان $e^{-1}\le e^{-x^2}\le 1$

و بما أن الدالة $t\mapsto e^{-x^2}$ متصلة على المجال $[0;1]$ و $0\prec 1$

فان: $\int_0^1e^{-1}dt\le\int_0^1e^{-t^2}dt\le\int_0^1 1dt$

إذن: $\frac{1}{e}\le\int_0^1e^{-x^2}dt\le 1$

تمرين16: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي :

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n=\int_0^1\frac{1}{1+x^n}dx$$

(1بين أن (u_n) تزايدية (2بين أن : $\frac{1}{2}\le u_n\le 1$ $\forall n\in\mathbb{N}$

الجواب : (1 $u_{n+1}-u_n=\int_0^1\frac{1}{1+x^{n+1}}dx-\int_0^1\frac{1}{1+x^n}dx$

$$=\int_0^1\left(\frac{1+x^n-1-x^{n+1}}{(1+x^n)(1+x^{n+1})}\right)dx=\int_0^1\frac{x^n(1-x)}{(1+x^n)(1+x^{n+1})}dx$$

نعلم أن : $0\le x\le 1$ اذن : $0\le 1-x$ ولدينا :

$$\frac{x^n}{(1+x^n)(1+x^{n+1})}\ge 0$$

اذن : $\frac{x^n(1-x)}{(1+x^n)(1+x^{n+1})}\ge 0$ ومنه :

$$\int_0^1 \frac{x^n(1-x)}{(1+x^n)(1+x^{n+1})}dx\ge 0$$

وبالتالي $u_{n+1}-u_n\ge 0$ أي : (u_n) تزايدية

2)لدينا: $0\le x^n\le 1 \Leftrightarrow 0\le x\le 1 \Leftrightarrow x\in[0,1]$

$\Leftrightarrow 1\le x^n+1\le 2$

اذن : $\frac{1}{2}\le \frac{1}{x^n+1}\le 1$

وبالتالي : $\int_0^1 \frac{1}{2} dx \le \int_0^1 \frac{1}{x^n+1}dx\le \int_0^1 1dx$

اذن $\frac{1}{2}[x]_0^1\le \int_0^1\frac{1}{x^n+1}dx\le [x]_0^1$ ومنه : $\frac{1}{2}\le u_n\le 1$

تمرين17: نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي:

$$f(x)=\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$$

حدد القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[0;\ln 2]$

الجواب : القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[0;\ln 2]$ هي :

$$f(c)=\frac{1}{\ln 2-0}\int_0^{\ln 2}\frac{e^x}{(e^x+1)^2}dx=\frac{1}{\ln 2-0}\int_0^{\ln 2}\frac{(e^x+1)'}{(e^x+1)^2}dx$$

$$=\frac{1}{\ln 2}\left[-\frac{1}{e^x+1}\right]_0^{\ln 2}=\frac{1}{\ln 2}\left(-\frac{1}{3}+1\right)=\frac{2}{3\ln 2}$$

تمرين18: احسب التكامل $I=\int_0^{\ln 2}e^{4t}dt$

الجواب :

$$I=\int_0^{\ln 2}e^{4t}dt=\left[\frac{1}{4}e^{4t}\right]_0^{\ln 2}=\frac{1}{4}e^{4\ln 2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}e^{\ln 16}-\frac{1}{4}=\frac{15}{4}$$

$$J=\int_1^e\frac{\ln^5 x}{x}dx=\int_1^e \ln' x\ln^5 x\,dx=\left[\frac{1}{6}\ln^6 x\right]_1^e=\frac{1}{6}$$

تمرين19: احسب التكاملات التالية : $I=\int_0^\pi x\sin x\,dx$ (1

$K=\int_1^e \ln x\,dx$ (3 $\quad J=\int_0^{\ln 2}xe^x dx$ (2

أجوبة :(1: نستعمل تقنية المكاملة بالأجزاء:

نضع $u'(x)=\sin x$ و $v(x)=x$, و منه $u(x)=-\cos x$ و $v'(x)=1$

لدينا u و v قابلتان للاشتقاق على المجال $[0;\pi]$ و u' و v' متصلتان على المجال $[0;\pi]$

ومنه:

$$I=[-x\cos x]_0^\pi-\int_0^\pi -\cos x\,dx=[-x\cos x]_0^\pi-[-\sin x]_0^\pi=\pi$$

(2 $J=\int_0^{\ln 2}xe^x dx$ نستعمل تقنية المكاملة بالأجزاء:

نضع $u'(x)=e^x$ و $v(x)=x$, و منه $u(x)=e^x$ و $v'(x)=1$

لدينا u و v قابلتان للاشتقاق على المجال $[0;\ln 2]$ و u' و v' متصلتان على المجال $[0;\ln 2]$

ومنه: $J=\left[xe^x\right]_0^{\ln 2}-\int_0^{\ln 2}1e^x dx=\ln 2e^{\ln 2}-\left[e^x\right]_0^{\ln 2}$

$$J=2\ln 2-\left(e^{\ln 2}-1\right)=2\ln 2-(2-1)=2\ln 2-1$$

(3 $K=\int_1^e\ln x\,dx$ نستعمل تقنية المكاملة بالأجزاء:

$$K=\int_1^e \ln x\,dx=\int_1^e 1\times\ln x\,dx$$

نضع $u'(x)=1$ و $v(x)=\ln x$, و منه $u(x)=x$ و $v'(x)=\frac{1}{x}$

لدينا u و v قابلتان للاشتقاق على المجال $[1;e]$ و u' و v' متصلتان على المجال $[1;e]$

ومنه: $K=[x\ln x]_1^e-\int_1^e x\times\frac{1}{x}dx=e\ln e-\int_1^e x\times\frac{1}{x}dx$

$$K=e-\int_1^e 1dx=e-[x]_1^e=e-e+1=1$$

تمرين20: باستعمال المكاملة بالأجزاء أحسب التكاملات الآتية :

$$I=\int_0^1 xe^{2x}dx \text{ و } J=\int_1^{e^3}\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^2}}dx$$

الأجوبة: مكاملة بالأجزاء :

$$I=\int_0^1 xe^{2x}dx=\frac{1}{2}\left[xe^{2x}\right]_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}dx$$

$$I=\frac{1}{2}\left[xe^{2x}\right]_0^1-\frac{1}{4}\left[e^{2x}\right]_0^1=\frac{1}{4}\left(e^2+1\right)$$

$$I=\int_1^{e^3}\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^2}}dx=\int_1^{e^3}x^{-\frac{2}{3}}\ln x\,dx$$

$$=\left[3x^{\frac{1}{3}}\ln x\right]_1^{e^3}-\int_1^{e^3}3x^{\frac{1}{3}}\frac{1}{x}dx=\left[3x^{\frac{1}{3}}\ln x\right]_1^{e^3}-3\int_1^{e^3}x^{-\frac{2}{3}}dx$$

$$=\left[3x^{\frac{1}{3}}\ln x\right]_1^{e^3}-9\left[x^{\frac{1}{3}}\right]_1^{e^3}=9$$

تمرين21: المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(o;\vec{i};\vec{j})$ مع $\|\vec{i}\|=1cm$ نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال : $[1;3]$ كالتالي: $f(x)=2x+1$

1) هل f دالة متصلة على قطعة $[1;3]$ ؟

2) أرسم (C_f) منحنى الدالة f على المجال $[1;3]$

3) أحسب مساحة حيز المستوى (Δ_f) المحصور بين (C_f) منحنى الدالة f و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتهما على التوالي $x=1$ و $x=3$

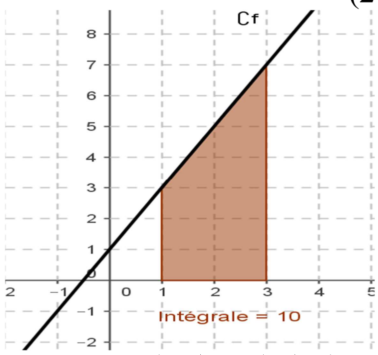
4) أحسب التكامل التالي : $I=\int_1^3 f(x)\,dx$

5) قارن المساحة والتكامل ؟

أجوبة :

1) f دالة حدودية متصلة على مجموعة تعيفها اذن متصلة على المجال $[1;3]$

2)



3) الشكل المحصل عليه هو عبارة عن شبه منحرف :يمكن حساب مساحته بتقسيمه الى مستطيل ومثلث ومنه نجد :

$$A(\Delta_f)=2\times3+\frac{4\times2}{2}=2\times3c^2m+\frac{4\times2}{2}c^2m=10c^2m$$

4) $$I=\int_1^3 f(x)\,dx=\int_1^3(2x+1)dx=\left[x^2+x\right]_1^3$$

$$I=(3^2+3)-(1^2+1)=12-2=10$$

5) نلاحظ أن : $A(\Delta_f)=\int_1^3 f(x)\,dx.ua$

في كل ما يلي المستوى منسوب إلى معلم متعامد $(o;\vec{i};\vec{j})$ وحدة قياس المساحات و التي نرمز لها بالرمز $u.a$ هي مساحة المستطيل $OIKJ$

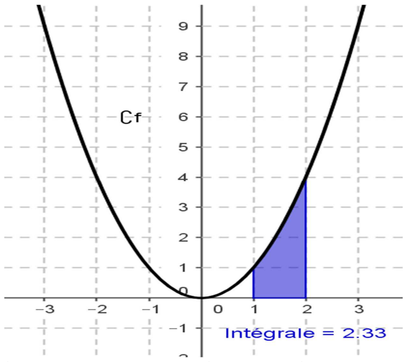
يعني أن: $u.a=\|\vec{i}\|\|\vec{j}\|$

تمرين22: المستوى المنسوب الى معلم متعامد ممنظم $(o;\vec{i};\vec{j})$ مع $\|\vec{i}\|=2cm$

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي: $f(x)=x^2$

1) أرسم (C_f) 2) أحسب A مساحة حيز المستوى المحصور بين منحنى الدالة f و محور الأفاصيل و المستقيمين الذين معادلتهما على التوالي: $x=1$ و $x=2$

الجواب : 1)



2) حسب الخاصية السابقة يكفي حساب التكامل التالي :

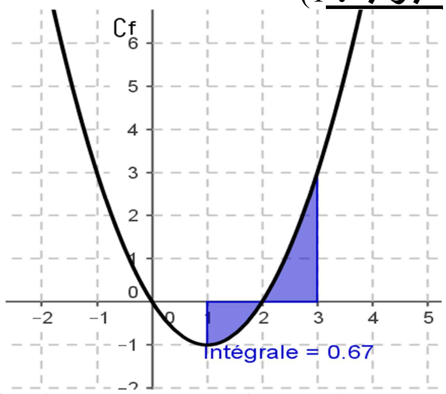
$$A=\int_1^2|f(x)|dx$$

$$A=\int_1^2|f(x)|dx=\int_1^2|x^2|dx=\int_1^2 x^2dx=$$

$$A=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^2=\frac{1}{3}\times2^3-\frac{1}{3}\times1^3=\frac{7}{3}\times2cm\times2cm=\frac{28}{3}c^2m$$

تمرين23: المستوى المنسوب الى معلم متعامد $(o;\vec{i};\vec{j})$ مع $\|\vec{i}\|=2cm$ و $\|\vec{j}\|=3cm$ نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي: $f(x)=x^2-2x$ أحسب A مساحة حيز المستوى المحصور بين منحنى الدالة f و المستقيمين الذين معادلتهما على التوالي: $x=1$ و $x=3$

الجواب : 1)



2) حسب الخاصية السابقة يكفي حساب التكامل التالي :

$$A=\int_1^3|f(x)|dx$$

$$A=\int_1^3|f(x)|dx=\int_1^3|x^2-2x|dx=$$

دراسة اشارة x^2-2x على المجال : $[1;3]$

$x^2-2x=0$ يعني $x(x-2)=0$ يعني $x=0$ أو $x=2$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
x^2-2x		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$A=\int_1^3|x^2-2x|dx=\int_1^2|x^2-2x|dx+\int_2^3|x^2-2x|dx$$

$$A=\int_1^2-(x^2-2x)dx+\int_2^3(x^2-2x)dx$$

$$A=-\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_1^2+\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_2^3=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_1^2+\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_2^3$$

$$=-\frac{1}{3}\times 2^3+2^2+\frac{1}{3}\times 1^3-1^2+\frac{1}{3}\times 3^3-3^2-\frac{1}{3}\times 2^3+2^2$$

$$=-\frac{2}{3}\times 2^3+8+\frac{1}{3}-1+\frac{27}{3}-9=-\frac{16}{3}+\frac{1}{3}+\frac{27}{3}-2$$

$$A=2\times 2cm\times 3cm=12c^2m$$

تمرين24: المستوى المنسوب الى معلم متعامد ممنظم $(o;\vec{i};\vec{j})$

مع $\|\vec{i}\|=2cm$ ونعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي:

$f(x)=1-e^x$

أحسب A مساحة حيز المستوى المحصور بين منحنى الدالة f و المستقيمين الذين معادلتهما على التوالي: $x=\ln 2$ و $x=\ln 4$

الجواب:

يكفي حساب التكامل التالي : $I=\int_{\ln 2}^{\ln 4}|f(x)|dx$

$$I=\int_{\ln 2}^{\ln 4}|f(x)|dx=\int_{\ln 2}^{\ln 4}|1-e^x|dx$$

نعلم أن : $\ln 2\le x\le \ln 4$ يعني $e^{\ln 2}\le e^x\le e^{\ln 4}$ يعني

$2\le e^x\le 4$

اذن : $e^x>1$ أي : $1-e^x<0$

ومنه :

$$I=\int_{\ln 2}^{\ln 4}|1-e^x|dx=\int_{\ln 2}^{\ln 4}-(1-e^x)dx=\int_{\ln 2}^{\ln 4}(e^x-1)dx$$

$$I=[e^x-x]_{\ln 2}^{\ln 4}=(e^{\ln 4}-\ln 4)-(e^{\ln 2}-\ln 2)$$

$$I=(4-2\ln 2)-(2-\ln 2)=4-2\ln 2-2+\ln 2=2-\ln 2$$

ومنه : $A=(2-\ln 2)\times 2cm\times 2cm=4(2-\ln 2)c^2m$

تمرين25: المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(o;\vec{i};\vec{j})$

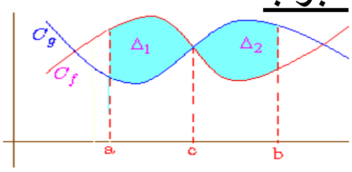
بحيث $\|\vec{i}\|=2cm$

نعتبر الدالتين العدديتين f و g المعرفتين بما يلي:

$f(x)=\frac{2e^x}{e^x+1}+e^{-x}$ و $g(x)=e^{-x}$

أحسب ب cm^2 مساحة حيز المستوى المحصور بين منحنيي الدالتين f و g و المستقيمين اللذين معادلتهما على التوالي: $x=0$ و $x=\ln 2$ (إنشاء المنحنيين غير مطلوب)

الجواب



يكفي حساب التكامل التالي : $I=\int_1^e|f(x)-g(x)|dx$

$$I=\int_0^{\ln 2}\left|\frac{2e^x}{e^x+1}+e^{-x}-e^{-x}\right|dx=\int_0^{\ln 2}\left|\frac{2e^x}{e^x+1}\right|dx=\int_0^{\ln 2}\frac{2e^x}{e^x+1}dx$$

لأن : $\frac{2e^x}{e^x+1}>0$

ومنه : $I=\int_0^{\ln 2}\frac{2e^x}{e^x+1}dx=2\int_0^{\ln 2}\frac{(e^x+1)'}{e^x+1}dx=[2\ln|e^x+1|]_0^{\ln 2}$

$$I=2\ln|e^{\ln 2}+1|-2\ln|e^0+1|=2\ln 3-2\ln 2=2\ln\frac{3}{2}$$

ومنه : $A=2\ln\frac{3}{2}\times 2cm\times 2cm=8\ln\frac{3}{2}c^2m$

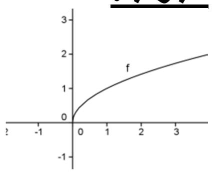
تمرين26: الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

بحيث : $\|\vec{i}\|=2cm$ لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$

بما يلي: $f(x)=\sqrt{x}$ ليكن (C) منحناها في المعلم $(o;\vec{i};\vec{j})$

أحسب V حجم المجسم المولد بدوران (C) حول محور الأفاصيل على المجال $[0;4]$

الجواب:



$$I=\int_0^4\pi(f(x))^2dx=\int_0^4\pi(\sqrt{x})^2dx=\pi\int_0^4 xdx$$

$$I=\pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4=8\pi$$

ومنه : $V=8\pi\times 8c^3m=64\pi c^3m$

تمرين27 الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

بحيث : $\|\vec{i}\|=\frac{2}{3}cm$

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي:

$f(x)=\sqrt{x(e^x-1)}$

ليكن (C) منحناها في المعلم $(o;\vec{i};\vec{j})$

أحسب V حجم المجسم المولد بدوران (C) حول محور الأفاصيل على المجال $[0;1]$

الجواب:

$$I=\int_0^1\pi(f(x))^2dx=\int_0^1\pi\left(\sqrt{x(e^x-1)}\right)^2dx=\pi\int_0^1 x(e^x-1)dx$$

نحسب أولا : $\int_0^1 x(e^x-1)dx$

نستعمل تقنية المكاملة بالأجزاء

نضع $u'(x)=e^x-1$ و $v(x)=x$, و منه $u(x)=e^x-x$ و $v'(x)=1$

ومنه: $\int_0^1 x(e^x-1)dx=[x(e^x-x)]_0^1-\int_0^1 1(e^x-x)dx$

$$\int_0^1 x(e^x-1)dx=e-1-\left[e^x-\frac{x^2}{2}\right]_0^1$$

$$\int_0^1 x(e^x-1)dx=e-1-e+\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$$

ومنه : $I=\frac{1}{2}\pi$ وبالتالي : $V=\frac{1}{2}\pi\times\frac{8}{27}c^3m=\frac{4\pi}{27}c^3m$

<u>تمرين28 :</u> المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $\left(o;\vec{i};\vec{j}\right)$ مع $\left\|\vec{i}\right\| = 1cm$ نعتبر الدالة العددية المعرفة بما يلي: $f\left(x\right) = x - 1 + \frac{\ln x}{x}$

أحسب A مساحة حيز المستوى المحصور بين الدالة f و المستقيمات التي معادلاتها على التوالي$y = x - 1$ و$x = 1$ و $x = e$

<u>الجواب:</u> يكفي حساب التكامل التالي : $I = \int_1^e \left| f\left(x\right) - y \right| dx$

$$I = \int_1^e \left| x - 1 + \frac{\ln x}{x} - \left(x - 1\right) \right| dx = \int_1^e \left| \frac{\ln x}{x} \right| dx = \int_1^e \frac{\left|\ln x\right|}{\left|x\right|} dx$$

نعلم أن : $1 \le x \le e$ يعني $\ln\left(1\right) \le \ln x \le \ln e$ يعني $0 \le \ln x \le 1$

ومنه : $I = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \int_1^e \frac{1}{x} \ln x dx = \int_1^e \left(\ln x\right)' \left(\ln x\right)^1 dx$

$$I = \left[\frac{1}{2} \left(\ln x\right)^2 \right]_1^e = \frac{1}{2}\left(\ln e\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\ln 1\right)^2 = \frac{1}{2}$$

ومنه : $A = \frac{1}{2} 1cm \times 1cm = \frac{1}{2} c^2 m$